



Tricalc

Novas possibilidades de cálculo em 2º ordem

Com a apresentação do Tricalc 7.0, a Arktec incluiu no seu programa de cálculo de estruturas a análise em 2ª ordem, colocando à disposição dos utilizadores novas possibilidades de análise para os seus modelos estruturais.

Efectivamente, a disponibilização da análise de 2ª ordem vem permitir a consideração de novos aspectos tanto na análise do cálculo da estrutura deformada, como na análise dos tirantes, na modelação de apoios uni - direccionais e nas molas trabalhando somente à compressão. A generalidade do método utilizado permite que possa ser aplicado a distintas situações de forma fácil e automática, tendo o utilizador somente que activar a respectiva opção.

A título de curiosidade, podemos informar que uma estrutura com acções gravíticas e de vento se calcula em 1ª ordem uma única vez, com 26 hipóteses de combinação para a obtenção dos seus deslocamentos. No entanto, agora com Tricalc já é possível realizar a análise em 2ª ordem, com tantos cálculos como combinações finais. Ou seja, na prática milhares de processos informáticos na resolução do sistema de equações, um para cada combinação. Tudo isto só é possível graças ao novo motor de cálculo de resolução de equações implementado no Tricalc 7.0, com uma velocidade que permite resolver o sistema de equações em segundos.

Este artigo aborda os fundamentos do cálculo em 2ª ordem utilizado no Tricalc, a sua comparação com o cálculo em 1ª ordem e as vantagens da sua aplicação em diferentes situações do cálculo de estruturas.

Diferenças entre o cálculo em 1ª e 2ª ordem

Recordar em primeiro lugar, que para calcular os deslocamentos de todos os nós de uma estrutura deve resolver-se o seguinte sistema de equações:

$$[K] \cdot \{d\} = \{F\}$$

Em que $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura, $\{d\}$ são os deslocamentos e rotações e $\{F\}$ são as acções exteriores aplicadas à estrutura.

A principal diferença entre um cálculo elástico linear de 1ª ordem e todos os tipos de cálculo em 2ª ordem é, que no primeiro caso, cumpre-se o princípio de sobreposição e no segundo não.

Em 1ª ordem, é possível realizar o cálculo por separado para cada hipótese simples de acção e posteriormente combiná-las para obter as diferentes combinações do estado limite último e estado limite de serviço. Inclusive é possível modificar os coeficientes parciais de segurança das acções e obter directamente as combinações sem voltar a resolver o sistema de equações. Portanto, neste caso, as matrizes $\{d\}$ e $\{F\}$ possuem tantas colunas como hipóteses simples que se pretendam considerar.

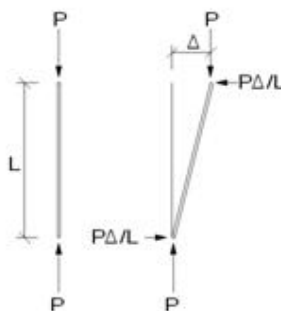
Em qualquer tipo de cálculo de 2ª ordem, ao não cumprir-se o princípio da sobreposição, deve resolver-se o sistema de equações para cada combinação de acções a estudar. Esse facto, deve-se a que $[K]$ e/ou $\{F\}$ variam em função de $\{d\}$, o que implica calcular por iterações ou aproximações sucessivas, em que após

cada iteração, se obtêm os deslocamentos e rotações $\{d\}$ a partir dos quais se recalcula $[K]$ e/ou $\{F\}$ para realizar a seguinte iteração, tal como se explica ao falar dos diferentes tipos de cálculo em 2ª ordem. Portanto, neste caso, as matrizes $\{d\}$ e $\{F\}$ possuem tantas colunas como combinações de acções se pretende considerar, pelo que deve realizar-se um cálculo por iterações, independente para cada combinação.

Tipos de cálculo em 2ª ordem

Os diferentes tipos de cálculo em 2ª ordem, agrupam-se nas seguintes categorias:

- **Cálculo em 2ª ordem geométrico ou elástico.** Neste caso, considera-se a posição das acções exteriores relativamente à estrutura deformada. Ou seja, se por exemplo, após um primeiro cálculo em 1ª ordem um pilar de altura h que tem uma acção vertical P na sua cabeça sofre um deslocamento horizontal relativo do seu topo de magnitude D_1 , aparece um momento de 2ª ordem de valor $P \cdot D_1$, daí que este método seja conhecido como o método P-Delta ($P \cdot D$). Este momento adicional (que pode definir-se com um par de forças horizontais de 2ª ordem em ambos os extremos do pilar de valor $H_1 = P \cdot D_1 / h$) produz, num segundo cálculo (ou iteração) um deslocamento horizontal adicional D_2 (que em geral será menor que D_1), assim sucessivamente, até que na iteração n , o deslocamento adicional D_n se considere suficientemente pequeno (a menos de um valor definido).



Método de 2º ordem $P \cdot D$, utilizado pelo Tricalc 7

- **Cálculo de 2ª ordem mecânico ou plástico.** Nesta análise valorizam-se as não linearidades do material. No caso de estruturas metálicas, aplica-se ao caso típico correspondente à formação de rótulas plásticas (geralmente nas ligações entre elementos), nas quais existe um gráfico momento – rotação não linear (elasto-plástico ou rígido-plástico). Outro caso típico, ainda em estrutura metálica, são os tirantes que não suportam compressões e que em tracção podem alcançar um limite de cedência ou plastificação - ver exemplo 3. No caso de estruturas de betão armado, este tipo de análise coloca-se na perda progressiva de rigidez à flexão ao ir-se fissurando a secção e no facto do betão armado possuir um gráfico tensão – deformação não linear. Também se utiliza esta análise no caso das coacções exteriores - apoios ou encastramentos - não lineares, tais como as lajes de fundação onde os deslocamentos abaixo da laje produzem reacções que crescem linearmente, porém no sentido contrário produz-se uma 'descolagem' fundação - terreno e portanto, sem coacção nem reacção. Por último, aplica-se ainda no caso dos apoios simples uni-direccionais, nos quais num sentido existe apoio e portanto reacção e no outro não existe coacção e portanto também não existe reacção (ver exemplo 4).

O cálculo de 2ª ordem geométrico é mais simples de utilizar e requer um menor esforço em tempo de cálculo que o cálculo em 2ª ordem mecânico. Normalmente ou se utiliza um cálculo em 2ª ordem geométrico ou abordam-se ambos os tipos numa mesma análise.

Tricalc permite considerar o cálculo em 2ª ordem geométrico ou elástico, bem como o cálculo em 2ª ordem mecânico ou plástico, no caso dos tirantes, de apoios uni-direccionais e de molas unidireccionais e lajes de fundação (versão 7.2)

Critérios de convergência

No cálculo de 2ª ordem, ao utilizar-se um processo iterativo de aproximações sucessivas, há que estabelecer um critério que indique quando se chegou à solução pretendida. Geralmente, adopta-se um

critério duplo: que os deslocamentos ou esforços calculados numa iteração sejam suficientemente próximos aos da iteração anterior e que não se supere um determinado número de iterações. Por exemplo, em Tricalc, o projectista pode fixar a diferença máxima de deslocamento entre duas iterações para todos os nós da estrutura.

Resolução em 2ª ordem - cálculo geométrico ou elástico

Para resolver o cálculo de esforços geométrico ou elástico em 2ª ordem, é necessário resolver o sistema de equações

$$([K] - [G_N]) \cdot \{d\} = \{F\}$$

Que também se pode escrever como

$$[K] \cdot \{d\} = \{F\} - [G_N] \cdot \{d\}$$

A matriz $[G_N]$ é a matriz geométrica de rigidez e define a relação entre $[K]$ ou $\{F\}$ com os deslocamentos da iteração anterior. Portanto, pode resolver-se de duas maneiras: calculando em cada iteração a matriz $([K] - [G_N])$, ou então, modificando em cada iteração o vector de acções exteriores $\{F\} - [G_N] \cdot \{d\}$. Em Tricalc optou-se pelo segundo método, no qual a matriz de rigidez permanece constante em todas as iterações e combinações de acções.

Este tipo de cálculo tem a particularidade de que a relação entre a deformação e acções adicionais de 2ª ordem é constante ($H_i = P \cdot D_i / h$, como vimos no exemplo), o que implica que não é necessário ter em conta a história da acção da estrutura.

Resolução em 2ª ordem – cálculo mecânico ou plástico

Neste caso, após cada iteração é necessário modificar a matriz de rigidez $[K]$.

Dependendo do fenómeno de 2ª ordem estudado, a modificação será mais ou menos complexa e irá requerer mais ou menos tempo de cálculo.

No caso dos **tirantes**, nos quais só se pretende evitar que trabalhem à compressão, basta após cada iteração, eliminar da matriz de rigidez os tirantes que trabalham à compressão, tendo em conta que se numa iteração um tirante estava comprimido, na iteração seguinte pode estar traccionado e vice-versa. Da mesma forma que no caso do cálculo de 2ª ordem geométrico, tampouco é necessário considerar a história de carga da estrutura.

No caso de formação de **rótulas plásticas** - ou em que se produza a plastificação do material -, ao produzir-se uma deformação irreversível é necessário considerar a história da carga. Ou seja; para estudar uma combinação de acções é necessário dividir o tempo em diferentes estados de carga intermédios e partir, em cada estado das deformações irreversíveis produzidas, do estado anterior. O mesmo ocorre com fenómenos derivados da **fissuração** em betão armado: uma vez que uma secção já fissurada (e portanto com a sua rigidez diminuída por vezes drasticamente) não volta ao seu estado anterior ainda que diminuam as cargas. No caso do betão armado existe a dificuldade adicional de que a rigidez fissurada depende da armadura da peça, que geralmente não se conhece antes de abordar o cálculo. Isto implica um primeiro cálculo para estimar a armadura. Se após uma iteração fosse necessário modificar substancialmente a armadura, dever-se-ia reiniciar todo o processo de cálculo. Há que referir no entanto, que existem regulamentos, como o Eurocódigo 2 (EN 1992-1-1:2004), nos quais, de forma simplificada, pode adoptar-se uma rigidez reduzida que já não depende da armadura nem da história da carga, transformando-se o problema em um problema de 1ª ordem.

Quando intervém a história da carga, é necessário adoptar técnicas de cálculo mais refinadas como passar de um estado de carga ao seguinte através de pequenos incrementos de carga. Além disso, na fase de projecto, nem sempre é conhecido o processo construtivo que terá a estrutura e portanto, é difícil prever a história da carga.

Como já foi referido, Tricalc permite opcionalmente a consideração dos tirantes (ver exemplo 3) e apoios uni-direccionais (ver exemplo 4), definidos em qualquer parte da estrutura com absoluta liberdade. No caso de se activar esta consideração, e em que existam barras consideradas como tirantes na estrutura, Tricalc modifica a matriz de rigidez após cada iteração (de cada combinação de esforços estudada em 2ª ordem) para eliminar dela os tirantes que se encontravam comprimidos na iteração anterior.

Estruturas calculadas em 2ª ordem

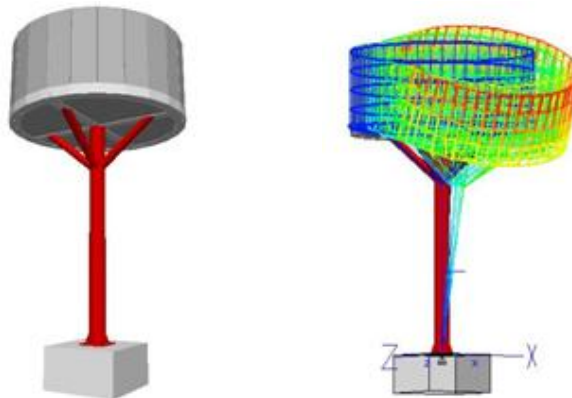
Seguidamente apresentam-se alguns exemplos de estruturas claramente translacionais (nós móveis), nas quais é necessário considerar os esforços adicionais que se produzem ao aplicar as forças exteriores na sua posição deformada.

No exemplo 1, a aplicação da carga pontual no extremo de uma consola produz efeitos de 2ª ordem que devem ser considerados, pois incrementam os esforços no pilar.



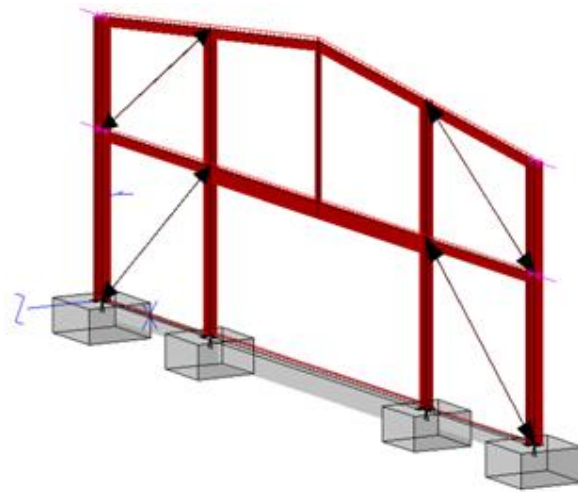
Exemplo 1, Estrutura translacional (nós móveis)

No exemplo 2, a estrutura tem uma acção superior importante. Qualquer variação na posição da acção incrementa os esforços do pilar pela aplicação da acção na posição deformada.



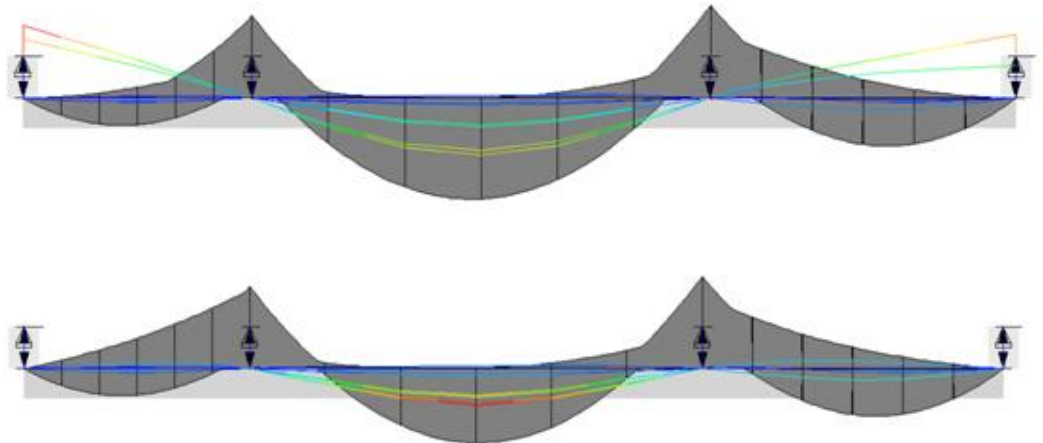
Exemplo 2, Estrutura com importante carga superior, que condiciona o dimensionamento do pilar ao considerar a hipótese de deslocamentos da carga.

No exemplo 3, dispuseram-se tirantes contra a acção do vento lateral que só devem trabalhar à tracção, o que condiciona também os esforços e deslocamentos do resto dos elementos. Observe-se que os tirantes não têm por quê formar cruces de Santo André nem estarem dispostos na diagonal de um rectângulo, existindo liberdade para a sua colocação.



Exemplo 3, Estrutura com tirantes para a estabilidade lateral, que só devem trabalhar à tracção.

No exemplo 4, vemos o caso de uma viga de três vãos apoiada no coroamento de muros de alvenaria. Estes apoios impedem a descida da viga, porém não impedem o seu levantamento. A alternância de sobrecargas provoca, quando somente o vão central está carregado, que a viga 'levante' nos apoios extremos. Para o seu cálculo, os apoios modelaram-se através de pilares com grande rigidez porém com a condição de tirante.



Exemplo 4, Estrutura com apoios unidireccionais modeladas com tirantes. Na imagem superior, calculada em 2ª ordem, no qual se observa a 'descolagem' dos apoios extremos em algumas combinações. Na imagem inferior, resultados da 1ª ordem, onde não é possível ter em conta este tipo de apoio (nos apoios extremos produzem-se reacções para algumas combinações).

Tempos de cálculo

É difícil determinar o tempo de cálculo adicional que supõe um cálculo de esforços em 2ª ordem, sobretudo porque vai depender da velocidade de convergência até à solução. Como exemplo, para uma estrutura de uma nave industrial metálica com cobertura tipo dentes de serra, calculada com vento e sismo, tem 1.277 barras, 622 nós e 3.456 graus de liberdade, tem-se:

Tipo de cálculo	Cálculo esforços e deslocamentos	Cálculo incluindo dimensionamento
1ª Ordem	00' 14"	04' 13"
2ª Ordem sem tirantes	06' 07" (1.042 iterações - 1,2" por iteração)	17' 22"
2ª Ordem com tirantes	07' 49" (1.230 iterações - 1,6" por iteração)	19' 13"

Critério de convergência utilizado em 2ª ordem, igual a 0,001cm de diferença entre os deslocamentos de 2 iterações sucessivas. 275 combinações calculadas em 2ª ordem.

Vantagens do método de cálculo utilizado por Tricalc

Se um cálculo em 2ª ordem produz sempre maiores deslocamentos e portanto, maiores esforços, é lógico perguntar porquê realizar um cálculo em 2ª ordem se existem outros métodos igualmente permitidos pela regulamentação.

No caso dos tirantes (elementos que só resistem às tracções) a resposta é evidente: o cálculo de 2ª ordem é o único que pode ter em consideração, de uma forma precisa e geral, este tipo de elementos. Ainda que existam métodos aproximados para ter em conta os tirantes sem necessidade de realizar um cálculo de 2ª ordem, não deixam de ser simplificações que exigem enormes condicionamentos geométricos e que restringem em grande medida a sua aplicabilidade.

No caso dos apoios unidireccionais, é possível eliminar em cada iteração os elementos que não trabalham como foram definidos. Por exemplo, nos apoios unidireccionais, no caso de numa determinada combinação trabalharem à compressão, podem ser eliminados na seguinte iteração deixando só os que estejam tracionados, o que permite a modelação correcta do apoio.

Também se conseguiu implementar (com este projecto) uma enorme vantagem no correcto cálculo de estruturas esbeltas ou de 'nós móveis'. É inclusive possível conseguir secções menores relativamente a outros métodos mais simplificados de consideração do estado limite último de instabilidade ou encurvadura

Efectivamente, à falta de um estudo mais profundo (objecto talvez de outro artigo), a consideração do estado limite último de instabilidade e encurvadura de um pilar para estruturas de nós móveis ou de nós translacionáveis definido nas diferentes regulamentações de betão, aço e madeira, pode-se realizar através dos três métodos seguintes:

- Calculando o comprimento de encurvadura como elemento de nós móveis ($L_p = \beta \cdot L$, com $\beta \in [1; \infty]$) e comprovando a encurvadura com métodos do tipo 'coluna modelo'.
- Calculando o comprimento de encurvadura normal ($L_p = \beta \cdot L$, com $\beta \in [0,5; 1]$), aumentando os esforços procedentes de acções horizontais (através dos denominados 'coeficientes de amplificação') e comprovando a encurvadura com métodos do tipo 'coluna modelo'.
- Comprovação global em 2ª ordem (tanto geométrica como mecânica), com a consideração das imperfeições globais e locais, não necessitando de nenhuma comprovação adicional de encurvadura.

Tipo de cálculo	Comprovação à encurvadura - comprimento de encurvadura
A) 1ª Ordem	Elemento Translacional,, $L_p = \beta \cdot L$, com $\beta \in [1; \infty]$
B) 1ª Ordem com coeficientes de amplificação	Elemento Intranslacional,, $L_p = \beta \cdot L$, com $\beta \in [0,5; 1]$
C) 2ª Ordem	Não necessária

Assume-se sempre que é para estruturas de nós móveis

O método A é o menos exacto e o mais antigo. Está sujeito a muitas incertezas, uma vez que é muito sensível à correcta selecção do parâmetro 'b' que tem um intervalo de valores possíveis demasiado elevado.

O método B é mais preciso no que à variabilidade de 'b' diz respeito, uma vez que é muito reduzida. No entanto, é sensível à correcta selecção dos denominados coeficientes de amplificação, que em alguns casos (estruturas que não são lajes horizontais com pilares verticais - como no caso de naves industriais- ou encurvadura de elementos comprimidos não verticais) não são fáceis de obter.

O método C é o que muitas regulamentações denominam 'caso geral'. É o mais preciso de todos, porém em alguns casos (sobretudo em betão armado ou quando é necessário comprovar a encurvadura lateral ou torsional) é de muito difícil implementação.

O cálculo de 2ª ordem realizado pelo Tricalc situa-se nos métodos B e C: calcula-se o comprimento de encurvadura como elemento de nós fixos (intranslacional) ($L_p = \beta L$, com $\beta \in [0,5; 1]$) e comprova-se a encurvadura com métodos do tipo 'coluna modelo'. Só em alguns casos (elementos metálicos não sensíveis à encurvadura lateral ou torsional, como secções ocas ou em caixão) poderia utilizar-se em Tricalc o método C (ou seja, cálculo em 2ª ordem geométrica ou elástica considerando as imperfeições globais e locais e não comprovar à encurvadura).

Portanto, o cálculo de 2ª ordem de Tricalc tem as seguintes vantagens relativamente aos métodos A e B:

- Relativamente ao método A, a variabilidade do parâmetro 'b' é pequena sendo pouco sensível a uma incorrecta selecção do referido parâmetro.
- Relativamente ao método B, não depende de coeficientes de amplificação (por vezes de difícil obtenção), pelo que é muito mais versátil a sua aplicação a qualquer elemento comprimido de uma estrutura. Além disso, utilizar os esforços de um cálculo em 2ª ordem geométrico é sempre mais preciso que utilizar a simplificação de amplificar os esforços de primeira ordem através de coeficientes, também obtidos em primeira ordem.

Conclusão

Pode afirmar-se que o tempo de cálculo adicional que supõe um cálculo em 2ª ordem se pode classificar como alguns minutos adicionais ao tempo de cálculo em 1ª ordem, pelo que a sua consideração dentro do projecto da estrutura é perfeitamente sustentável, uma vez que possui numerosas vantagens e aplicações:

- *Capacidade de análise do modelo em situação deformada*, que permite utilizar os esforços em 2ª ordem com a hipótese de comprimento de encurvadura da estrutura como nós fixos (intranslacional).
- *Versatilidade* para a consideração de tirantes em qualquer posição da estrutura, ou as imperfeições iniciais mencionadas nos Eurocódigos ou a consideração de apoios uni - direccionais.
- *Automatismo*, uma vez activada a opção, o programa mostra os resultados em 2ª ordem.